

集值映射最优化问题的真有效解

刘 伟, 蔡前凤

(广东工业大学 应用数学系, 广东 广州, 510090)

摘要: 利用 Jahn 与 Rauh 提出的集值映射的切上导数概念, 给出了向量集值映射最优化问题的各种有效解的充分与必要条件.

关键词: 集值映射最优化; 切上导数; 真有效解

中图分类号: O224

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2001)02-0108-05

在最优化理论中, 真有效解的讨论一直是一个人们关注的课题, 给出各种真有效解的必要与充分的最优性条件是很有意义的. Abin 与 Ekeland^[1,2]、Corley^[3] 与 Luc^[4] 等人利用集值映射的切导数概念分别对强有效解、弱有效解与局部有效解给出了必要与充分最优性条件. Jahn 与 Rauh^[5] 利用他们引进的集值映射的切上导数概念, 给出了弱有效解与强有效解的必要与充分的最优性条件. 光对这两种解给出必要与充分的最优性条件, 对于向量优化理论来说是不完善的, 本文主要利用文献[5]中集值映射的切上导数概念, 得出了 Henig 真有效解, 锥超有效解, Luc 真有效解的充分与必要性最优性条件.

1 预备定义与符号

在本文中, 我们总设 X, Y 为实赋范线性空间, Y^* 是 Y 的共轭空间, C 是 Y 的闭凸点锥, Y 的偏序由 C 导出.

C 的共轭锥定义为 $C^* := \{f \in Y^* : f(y) \geq 0, \forall y \in C\}$.

C^* 的拟内部记为 $C^\#$, 其中 $C^\# := \{f \in Y^* : f(y) > 0, \forall y \in C \setminus \{0\}\}$.

用 $\text{cone}(A)$ 表示集合 A 生成的锥, 即 $\text{cone}(A) := \bigcup\{\lambda A : \lambda \geq 0\}$.

$\text{cl}(A)$ 表示 A 的闭包, $\text{int}(A)$ 表示 A 的内部.

C 的凸子集 B 称为是 C 的基, 若 $C = \text{cone}(B)$ 且 $0 \notin \text{cl}(B)$.

本文中总用 U 表示 Y 中的闭单位球. 设 B 为 C 的基, 令 $\delta := \inf\{\|b\| : b \in B\}$, 则显然 $\delta > 0$. $\forall 0 < \varepsilon < \delta$, 记 $C_\varepsilon(B) := \text{cone}(B + \varepsilon U)$.

由文[6]知 C 有基的充分必要条件是 $C^\# \neq \emptyset$. 还可知, 当 C 有基 B 时, $\text{cl}(\text{int } C_\varepsilon(B))$ 是闭凸点锥, 且 $C \setminus \{0\} \subset \text{int } C_\varepsilon(B)$, $\forall 0 < \varepsilon < \delta$.

本文总设 S 是 X 的非空子集, $F: S \rightarrow 2^Y$ 是集值映射. 集合 $\text{graph}(F) := \{(x, y) \in S \times Y : y \in F(x)\}$ 称为是 F 的图. 集合 $\text{epi}(F) := \{(x, y) \in S \times Y : y \in F(x) + C\}$ 称为是 F 的上图.

设 $(x^1, y^1) \in \text{graph}(F)$, 定义 F 的上图在点对 (x^1, y^1) 处的切锥为

收稿日期: 2000-08-28

作者简介: 刘伟(1970), 男, 硕士, 助教; 主要研究方向: 运筹与最优化.

$T(\text{epi}(F), (x^1, y^1)) := \{(x, y) \in X \times Y: \text{存在} \{x_n\} \subset S, y_n \in F(x_n) + C, \text{以及正数列} \{t_n\},$
使得 $\lim_n (x_n, y_n) = (x^1, y^1)$ 且 $\lim_n t_n((x_n, y_n) - (x^1, y^1)) = (x, y)\}$.

用 $T_X(\text{epi}(F), (x^1, y^1))$ 表示集合 $T(\text{epi}(F), (x^1, y^1))$ 在 X 上的投影.

设 $x^1 \in S, y^1 \in F(x^1)$ 给定, 单值映射 $DF(x^1, y^1): T_X(\text{epi}(F), (x^1, y^1)) \subset X \rightarrow Y$, 它的上图等于 F 的上图在点对 (x^1, y^1) 处的切锥, 即 $\text{epi}(DF(x^1, y^1)) = T(\text{epi}(F), (x^1, y^1))$ 称为是 F 在 (x^1, y^1) 的切上导数.

由定义可知, 若 $y = DF(x^1, y^1)(x)$, 则 $(x, y) \in \text{epi}(DF(x^1, y^1)) = T(\text{epi}(F), (x^1, y^1))$, 于是, 存在 $\{(x_n, y_n)\} \subset \text{epi}(F)$, 以及正数列 $\{t_n\}$, 使

$$(x^1, y^1) = \lim_n (x_n, y_n) \text{ 且 } (x, y) = \lim_n t_n(x_n - x^1, y_n - y^1).$$

若 S 为 X 的凸子集, 集值映射 $F: S \rightarrow 2^Y$ 称为是 C -凸的, 若 $\forall x^1, y^1 \in S, \forall t \in [0, 1]$ 有

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \subset F(tx_1 + (1-t)x_2) + C.$$

我们考虑向量集值优化问题:

$$\min\{F(x): x \in S\}. \quad (1)$$

令 $F(S) = \bigcup\{F(x): x \in S\}$. 我们给出向量集值优化问题的各种有效性概念.

定义1 如果点对 (x^1, y^1) 满足 $(F(S) - y^1) \cap -C = \{0\}$, 则称 (x^1, y^1) 为问题(1)的有效点对, 并称 x^1 为问题(1)的有效解.

定义2 如果点对 (x^1, y^1) 满足 $(F(S) - y^1) \cap -\text{int}C = \emptyset$ 则称 (x^1, y^1) 为问题(1)的弱有效点对, 并称 x^1 为问题(1)的弱有效解.

定义3 设 C 有基 B . 如果对某个 $0 < \varepsilon < \delta$, 满足 $(F(S) - y^1) \cap -\text{int}C_\varepsilon(B) = \emptyset$ 则称 (x^1, y^1) 为问题(1)的Henig有效点对.

定义4 称点对 (x^1, y^1) 为问题(1)的超有效点对, 若存在正数 $M > 0$, 使得 $\text{cone}(F(S) - y^1) \cap (U - C) \subset MU$.

定义5 称点对 (x^1, y^1) 为问题(1)的锥超有效点对(或称 x^1 为问题(1)的锥超有效解), 若存在正数 $M > 0$, 使得 $\text{cone}(F(S) + C - y^1) \cap (U - C) \subset MU$.

定义6 称点对 (x^1, y^1) 为问题(1)的Luc有效点对, 若存在点凸锥 $G \subset Y$, 使 $C \setminus \{0\} \subset \text{int}G$, 且 $(F(S) - y^1) \cap -G = \{0\}$.

2 切上导数与最优性条件

定理1 设 C 具有基 B . 如果 (x^1, y^1) 是问题(1)的Henig有效点对, $DF(x^1, y^1)$ 存在, 且 $DF(x^1, y^1)$ 在 $S - x^1$ 上有定义, 则存在某个 $\varepsilon < 0$, 使得 $0 < \varepsilon < \delta$, 且

$$DF(x^1, y^1)(x - x^1) \notin -\text{int}C_\varepsilon(B), \quad \forall x \in S.$$

证明: 由 (x^1, y^1) 是问题(1)的Henig有效点对, 则 $\exists 0 < \varepsilon < \delta$, 使

$$(F(S) - y^1) \cap -\text{int}C_\varepsilon(B) = \emptyset \quad (2)$$

假若存在 $x \in S$, 使对上述 $\varepsilon > 0$,

$$y = DF(x^1, y^1)(x - x^1) \in -\text{int}C_\varepsilon(B). \quad (3)$$

由切上导数的定义, 知 $(x - x^1, y) \in T(\text{epi}(F), (x^1, y^1))$. 于是存在序列 $\{(x_n, y_n)\} \subset \text{epi}(F)$, 以及正数列 $\{t_n\}$ 使得

$$(x^1, y^1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) \text{ 且 } (x - x^1, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n (x_n - x^1, y_n - y^1). \quad (4)$$

由式(3)与(4), 有 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n (y_n - y^1) \in -\text{int } C_\varepsilon(B)$. 可知, 当 n 充分大时, 有 $t_n (y_n - y^1) \in -\text{int } C_\varepsilon(B)$, 从而

$$y_n \in y^1 - \text{int } C_\varepsilon(B). \quad (5)$$

因为 $(x^1, y^1) \in \text{epi}(F)$, 存在 $y_n \in F(x_n)$, 以及 $c_n \in C$, 使得 $y_n = y_n + c_n$.

由 $\text{int } C_\varepsilon(B) + C = \text{int } C_\varepsilon(B)$, 据式(5), 有 $y_n = y_n - c_n \in y^1 - \text{int } C_\varepsilon(B) - C = y^1 - \text{int } C_\varepsilon(B)$, 而 $x_n \in S$, 知 $y_n \in F(S)$. 从而有 $y_n - y^1 \in (F(S) - y^1) \cap -\text{int } C_\varepsilon(B)$. 这与式(3)矛盾. 因此 $\text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) \not\subseteq -\text{int } C_\varepsilon(B)$, $\forall x \in S$. 因而, 存在某个 $\varepsilon > 0$, 使得 $0 < \varepsilon < \delta$, 且 $\text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) \not\subseteq -\text{int } C_\varepsilon(B)$, $\forall x \in S$.

为了得出点对 (x^1, y^1) 是问题(1)的解的充分性条件, 我们给出下面的引理(见文[5]).

引理 1 设 S 是 X 的非空凸子集, $F: S \rightarrow 2^Y$ 是 C -凸映射, 若 $x^1 \in S$, $y^1 \in F(x^1)$, 使得 F 在 (x^1, y^1) 的切上导数存在, 则有 $F(x) - y^1 \subset \text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) + C$, $\forall x \in S$.

注 1 若 S 是 X 的非空凸子集, $F: S \rightarrow 2^Y$ 是 C -凸映射, 且 F 在 (x^1, y^1) 的切上导数存在, 则 $\text{DF}(x^1, y^1)$ 在 $S - x^1$ 上有定义.

定理 2 设 S 是 X 的非空凸子集, F 是 C -凸映射, $\text{DF}(x^1, y^1)$ 存在. 其中 $x^1 \in S$, $y^1 \in F(x^1)$. 又设 C 有基 B . 若存在某个 $\varepsilon < 0$, 使得 $0 < \varepsilon < \delta$, 且 $\text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) \not\subseteq \text{int } C_\varepsilon(B)$, $\forall x \in S$, 则 (x^1, y^1) 是问题(1)的 Henig 有效点对.

证明: 由已知条件, 存在某个 $0 < \varepsilon < \delta$, 使 $\text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) \not\subseteq \text{int } C_\varepsilon(B)$, $\forall x \in S$.

由文[6], 知 $C_\varepsilon(B)$ 是点凸锥, 且 $C \setminus \{0\} \subset \text{int } C_\varepsilon(B)$, 从而

$$\{\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + C\} \cap (-\text{int } C_\varepsilon(B)) = \emptyset$$

由引理 1 以及 $C \subset C_\varepsilon(B)$, 知

$$(F(x) - y^1) \cap (-\text{int } C_\varepsilon(B)) \subset \{\text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) + C\} \cap (-\text{int } C_\varepsilon(B)) = \emptyset \quad \forall x \in S,$$

知 $(F(S) - y^1) \cap (-\text{int } C_\varepsilon(B)) = \emptyset$ 因此 (x^1, y^1) 是问题(1)的 Henig 有效点.

由定理 1, 注 1 与定理 2, 我们可得到以下的推论.

推论 1 设 S 是 X 的非空凸子集, $F: S \rightarrow 2^Y$ 是 C -凸映射, $\text{DF}(x^1, y^1)$ 存在, 其中 $x^1 \in S$, $y^1 \in F(x^1)$. 又设 C 有基 B . 则 (x^1, y^1) 是问题(1)的 Henig 有效点对的必要充分条件是存在某个 $\varepsilon > 0$, 使得 $0 < \varepsilon < \delta$, 且 $\text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) \not\subseteq \text{int } C_\varepsilon(B)$, $\forall x \in S$.

定理 3 设 $\text{DF}(x^1, y^1)$ 存在, 且 $\text{DF}(x^1, y^1)$ 在 $S - x^1$ 上有定义, 其中 $x^1 \in S$, $y^1 \in F(x^1)$. 若 (x^1, y^1) 是问题(1)的锥超有效点对, 则若存在正数 M , 使得

$$\text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + C) \cap (U - C) \subset MU.$$

证明: 任取 $z \in \text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) \cap (U - C))$, 则 $z = \lambda y = u - c$, 其中 $\lambda \geq 0$, $y = \text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1)$, $x \in S$, $u \in U$, $c \in C$.

不妨设 $z \neq 0$, 则 $\lambda > 0$, 由 $y = \text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1)$, 因此存在正数列 $\{t_n\}$, 以及

$$\{(x_n, y_n)\} \subset \text{epi}(F), \text{ 使 } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x^1, y^1), \text{ 且 } (x - x^1, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n (x_n - x^1, y_n - y^1).$$

因此 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n (y_n - y^1)$. 由 $(x_n, y_n) \in \text{epi}(F)$, 存在 $y'_n \in F(x_n)$, 其中 $x_n \in S$, 使 $y_n = y'_n + c_n$, $c_n \in C$. 因而有

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n (y'_n - y^1 + c_n).$$

由 $t_n(y'_n - y^1 + c_n) \in \text{cone}(F(S) - y^1 + C)$ 以及 (x^1, y^1) 是问题(1)的锥超有效点对, 则存在 $M > 0$, 使 $\text{cone}(F(S) - y^1 + C) \cap (U - C) \subset MU$, 从而 $\text{cone}(F(S) - y^1 + C) \cap (2U - C) \subset 2MU$. 再由 $z = \lambda y \in U - C \subset \text{int} 2U - C$, 知当 n 充分大时,

$$\lambda_n(y'_n - y^1 + c_n) \in \text{cone}(F(S) - y^1 + C) \cap (2U - C) \subset 2MU.$$

由 $2MU$ 是闭集, 令 $n \rightarrow \infty$, 知 $z = \lambda y \in 2MU$, 因此

$$\text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1)) \cap (U - C) \subset 2MU = M'U.$$

故存在正数 M , 使得 $\text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + C) \cap (U - C) \subset MU$.

定理4 设 S 是 X 的非空凸子集, $F: S \rightarrow 2^Y$ 是 C -凸映射. 若 $\text{DF}(x^1, y^1)$ 存在, 其中 $x^1 \in S$, $y^1 \in F(x^1)$. 则 (x^1, y^1) 是问题(1)的锥超有效点对的充分必要条件是存在正数 M , 使得

$$\text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + C) \cap (U - C) \subset MU.$$

证明: 充分性.

设存在正数 M , 使得 $\text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + C) \cap (U - C) \subset MU$.

由引理1知 $F(x) - y^1 \subset \text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) + C$, $\forall x \in S$.

因此

$$\text{cone}(F(x) - y^1 + C) \subset \text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) + C), \forall x \in S. \quad (6)$$

所以

$$\text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + C) \cap (U - C) \subset MU, \forall x \in S. \quad (7)$$

由(6), (7), 有 $\text{cone}(F(x) - y^1 + C) \cap (U - C) \subset MU$, $\forall x \in S$, 知 (x^1, y^1) 是问题(1)的锥超有效点对.

必要性. 设 (x^1, y^1) 是问题(1)的锥超有效点对. 由于 S 是凸集, $F: S \rightarrow 2^Y$ 是 C -凸映射, 知 $\text{DF}(x^1, y^1)$ 在 $S - x^1$ 上有定义. 类似定理3的证明, 可知存在 $M' > 0$, 使

$$\text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + C) \cap (U - C) \subset M'U.$$

即存在正数 M , 使得 $\text{cone}(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + C) \cap (U - C) \subset MU$.

定理5 设 S 是 X 的非空凸子集, $F: S \rightarrow 2^Y$ 是 C -凸映射. 若 $\text{DF}(x^1, y^1)$ 存在, 其中 $x^1 \in S$, $y^1 \in F(x^1)$. 又若存在点凸锥 G , 使 $C \setminus \{0\} \subset \text{int} G$, 且

$$\text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) \not\subseteq -G \setminus \{0\}, \forall x \in S.$$

则 (x^1, y^1) 是问题(1)的 Luc 有效点对.

证明: 由已知条件知, 存在点凸锥 G , 使

$$C \setminus \{0\} \subset \text{int} G, \text{ 且 } (\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + G) \cap (-G \setminus \{0\}) = \emptyset$$

由引理1, 有

$$\begin{aligned} (F(x) - y^1) \cap (-G \setminus \{0\}) &\subset (\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + C) \cap (-G \setminus \{0\}) \subset \\ &(\text{DF}(x^1, y^1)(S - x^1) + G) \cap (-G \setminus \{0\}) = \emptyset \quad \forall x \in S. \end{aligned}$$

因此 $(F(S) - y^1) \cap -G = \{0\}$, 知 (x^1, y^1) 是问题(1)的 Luc 有效点对.

定理6 若 (x^1, y^1) 是问题(1)的 Luc 有效点对(即 $x^1 \in S$, $y^1 \in F(x^1)$, 且存在点凸锥 $G \subset Y$, 使 $C \setminus \{0\} \subset \text{int} G$, 且 $(F(S) - y^1) \cap -G = \{0\}$), 且 $\text{DF}(x^1, y^1)$ 存在, $\text{DF}(x^1, y^1)$ 在 $S - x^1$ 上有定义, 则有 $\text{DF}(x^1, y^1)(x - x^1) \not\subseteq -\text{int} G$, $\forall x \in S$.

证明: 由 (x^1, y^1) 是问题(1)的 Luc 有效点对, 则 $x^1 \in S$, $y^1 \in F(x^1)$, 且存在点凸锥 G , 使 $C \setminus \{0\} \subset \text{int} G$, 以及

$$(F(S) - y^1) \cap -G = \{0\}. \quad (8)$$

假若存在 $x \in S$, 使

$$DF(x^1, y^1)(x - x^1) \in -\operatorname{int} G, \quad (9)$$

令 $y = DF(x^1, y^1)(x - x^1)$, 由切上导数的定义知, 存在 $\{(x_n, y_n)\} \subset \operatorname{epi}(F)$, 以及正数列 $\{t_n\}$, 使

$$(x^1, y^1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) \text{ 且 } (x - x^1, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n((x_n - x^1, y_n - y^1)).$$

知 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(y_n - y^1)$, 由式(9)知, 当 n 充分大时, 有

$$y_n \in y^1 - \operatorname{int} G. \quad (10)$$

因为 $(x_n, y_n) \in \operatorname{epi}(F)$, 存在 $y'_n \in F(x_n)$, $c_n \in C$, 使 $y_n = y'_n + c_n$. 又由 $\operatorname{int} G \supset C \setminus \{0\}$, 有 $C + \operatorname{int} G \subset G + \operatorname{int} G = \operatorname{int} G$. 再由式(10)知, $y'_n = y_n - c_n \in y^1 - c_n - \operatorname{int} G \subset y^1 - \operatorname{int} G$. 而 $y'_n \in F(x_n)$, 这与式(8)矛盾, 因此

$$DF(x^1, y^1)(x - x^1) \notin -\operatorname{int} G, \quad \forall x \in S.$$

参考文献:

- [1] Aubin J P. Contingent Derivatives of Set-Valued Maps and Existence of Solutions to Nonlinear Inclusions and Differential Inclusions[A]. Mathematical Analysis and Applications[C]. Part A, New York: Academic Press, 1981, 160-229.
- [2] Aubin J, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Wiley, 1984.
- [3] Corley H W. Optimality Conditions for Maximizations of Set-Valued Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1988, 58: 1-10.
- [4] Luc D T. Contingent Derivatives of Set-Valued Maps and Applications to Vector Optimization[J]. Mathematical Programming, 1991, 50: 99-111.
- [5] Jahn J, Rauh R. Contingent Epiderivatives and Set-Valued Optimization[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1997, 46: 193-211.
- [6] Gong X H. Connectedness of efficient solution sets for set-valued maps in normed spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 83: 83-96.

Proper Efficiency in Vector Set-Valued Optimization Problem

LIU Wei, CAI Qianneng

(Dept. of Applied Mathematics, GDUT, Guangzhou 510090, China)

Abstract: In this paper, the necessary and sufficient conditions of various proper efficient solutions in vector set-valued optimization problem are obtained by using the concept of contingent epiderivative, which has been introduced by Jahn and Rauh.

Key words: vector set-valued optimization; contingent epiderivative; proper efficiency